Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Primer parcial

10 de octubre de 2019

En lo que sigue X representará un espacio vectorial topológico de Hausdorff.

1. **(7 puntos)**
   Sean A y B subconjuntos de X, y sea $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son falsas y por qué?

   a) Si A y B son acotados, entonces $A+B$ también lo es.
   b) Si A y B son compactos, entonces $A+B$ también lo es.
   c) Si A y B son convexos, entonces $A+B$ también lo es.
   d) Si A y B son convexos, entonces $A \cup B$ también lo es.
   e) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A+B$ es cerrado.
   f) Si A y B son equilibrados, entonces $A+B$ también lo es.
   g) Si A y B son equilibrados, entonces $A \cup B$ también lo es.
   h) Si A y B son equilibrados, entonces $A \cap B$ también lo es.
   i) Si A y B son cerrados, entonces $A+B$ también lo es.

2. **(9 puntos)**
   Probar el *Teorema bipolar*: Si X es localmente convexo y $A \subseteq X$, entonces ${}^{\circ}(A^{\circ}) = \overline{A_{ec}}$, la envolvente convexa, equilibrada, y cerrada de A.

3. **(9 puntos)**
   Para cada $p \in (0,1]$ sea $\ell^p := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \sum_n |x(n)|^p < \infty\}$ con la topología definida por la métrica $d(x,y) = \sum_n |x(n) - y(n)|^p$. Dado $a \in \ell^\infty$, sea $\varphi_a : \ell^1 \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi_a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x(n)$, $\forall x \in \ell^1$. Aceptaremos los siguientes hechos:

   - si $0 < r < p \leq 1$, entonces $\ell^r \subseteq \ell^p$, y la inclusión es estricta.
   - para cada $p \in (0,1]$, el mapa $\eta_p : \ell^\infty \to (\ell^p)'$ dado por $\eta_p(a) = \varphi_a|_{\ell^p}$ es un isomorfismo lineal.
   - si $B_p := \{x \in \ell^p : d(x,0) \leq 1\}$, entonces $B_p^\circ = \{\eta_p(a) : a \in \ell^\infty \text{ y } \|a\|_\infty \leq 1\}$.

   De acuerdo a lo anterior identificaremos $(\ell^p)'$ con ℓ^∞, y el polar de B_p con

   $$B_\infty = \{a \in \ell^\infty \text{ y } \|a\|_\infty \leq 1\}.$$

   Entonces cada $p \in (0,1]$ define una topología w_p^* en ℓ^∞.

   Demostrar que si $r < p$, entonces w_r^* y w_p^* son diferentes, aunque son iguales sobre B_∞.